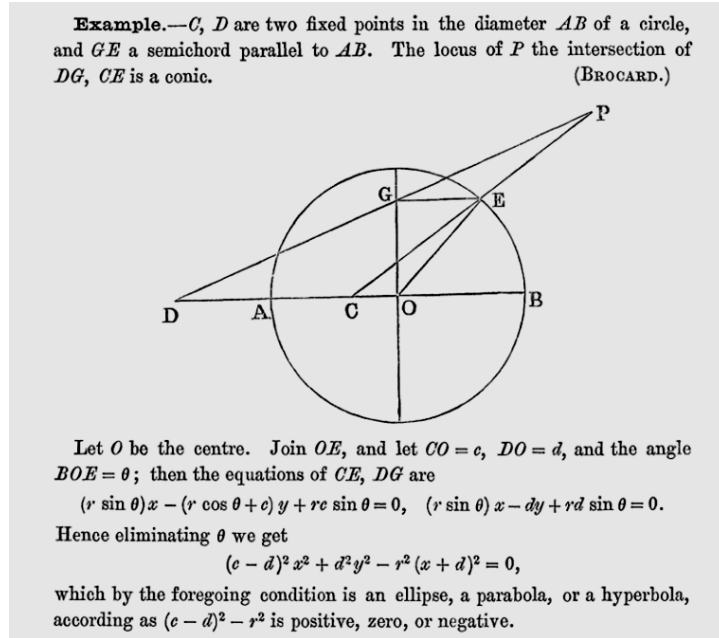


Egy ismeretlen feladat

Az [1] műben találtuk az alábbi példát – 1. ábra. Most ezt dolgozzuk fel.



1. ábra – forrása: [1]

A feladat

Az O középpontú, r sugarú kör AB átmérő - egyenesén adott a két rögzített pont: C és D , valamint az AB - vel párhuzamos GE fél húr. Mutassuk meg, hogy a DG és a CE egyenesek P metszéspontjainak mértani helye(i) kúpszelet(ek)!

A megoldás

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!

Itt megismételtük az 1. ábrát, néhány jelöléssel kiegészítve.

Ez alapján

~ a CE egyenes egyenlete:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{r \cdot \sin \theta}{c + r \cdot \cos \theta} = \frac{y}{c + x}, \quad (1)$$

innen adódik az 1. ábráról leolvasható egyik egyenes - egyenlet megfelelője:

$$(r \cdot \sin \theta) \cdot x + r \cdot \sin \theta \cdot c - (c + r \cdot \cos \theta) \cdot y = 0; \quad (1^*)$$

innen:

$$\underline{r \cdot \cos \theta = \frac{d}{x+d} \cdot (x+c) - c.} \quad (5)$$

Majd (3) és (5) négyzetösszegét képezve:

$$r^2 \cdot \sin^2 \theta + r^2 \cdot \cos^2 \theta = \left(\frac{d}{x+d} \cdot y \right)^2 + \left[\frac{d}{x+d} \cdot (x+c) - c \right]^2,$$

$$r^2 \cdot (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{d^2 \cdot y^2}{(x+d)^2} + \frac{[d \cdot (x+c) - c \cdot (x+d)]^2}{(x+d)^2},$$

$$r^2 = \frac{d^2 \cdot y^2}{(x+d)^2} + \frac{[x \cdot (d-c)]^2}{(x+d)^2},$$

$$d^2 \cdot y^2 + (d-c)^2 \cdot x^2 = r^2 \cdot (x+d)^2, \text{ innen:}$$

$$\boxed{d^2 \cdot y^2 + (d-c)^2 \cdot x^2 - r^2 \cdot (x+d)^2 = 0}. \quad (6)$$

A (6) egyenlet is megfelel az 1. ábra szövegében találhatóak. Ez egy másodfokú implicit függvénykapcsolat a keresett mértani hely(ek)re.

Annak érdekében, hogy jobban leolvasható legyen, hogy milyen görbé(ke)t ír le, átalakítjuk a (6) egyenletet:

$$d^2 \cdot y^2 + (d-c)^2 \cdot x^2 - r^2 \cdot (x^2 + 2 \cdot d \cdot x + d^2) = 0,$$

$$d^2 \cdot y^2 + [(d-c)^2 - r^2] \cdot x^2 - 2 \cdot (d \cdot r^2) \cdot x - (r^2 \cdot d^2) = 0. \quad (7)$$

A könnyebbség kedvéért rövidítő jelöléseket vezetünk be:

$$A = (d-c)^2 - r^2, \quad B = d \cdot r^2, \quad C = r^2 \cdot d^2. \quad (8)$$

Most (7) és (8) - cal:

$$\underline{d^2 \cdot y^2 + A \cdot x^2 - 2 \cdot B \cdot x - C = 0.} \quad (9)$$

Az 1. ábrán az olvasható, hogy a keresett mértani hely típusa **A** előjelétől függ.

Most tekintsük a **Graph** rajzoló programmal készült a 3. ábrát!

Itt a (7) egyenletet ábrázoltuk, az alábbi adatokkal:

$$r = 18 \text{ mm}; d = 31 \text{ mm}; c = 6; 13; 19 \text{ mm}. \quad (A)$$

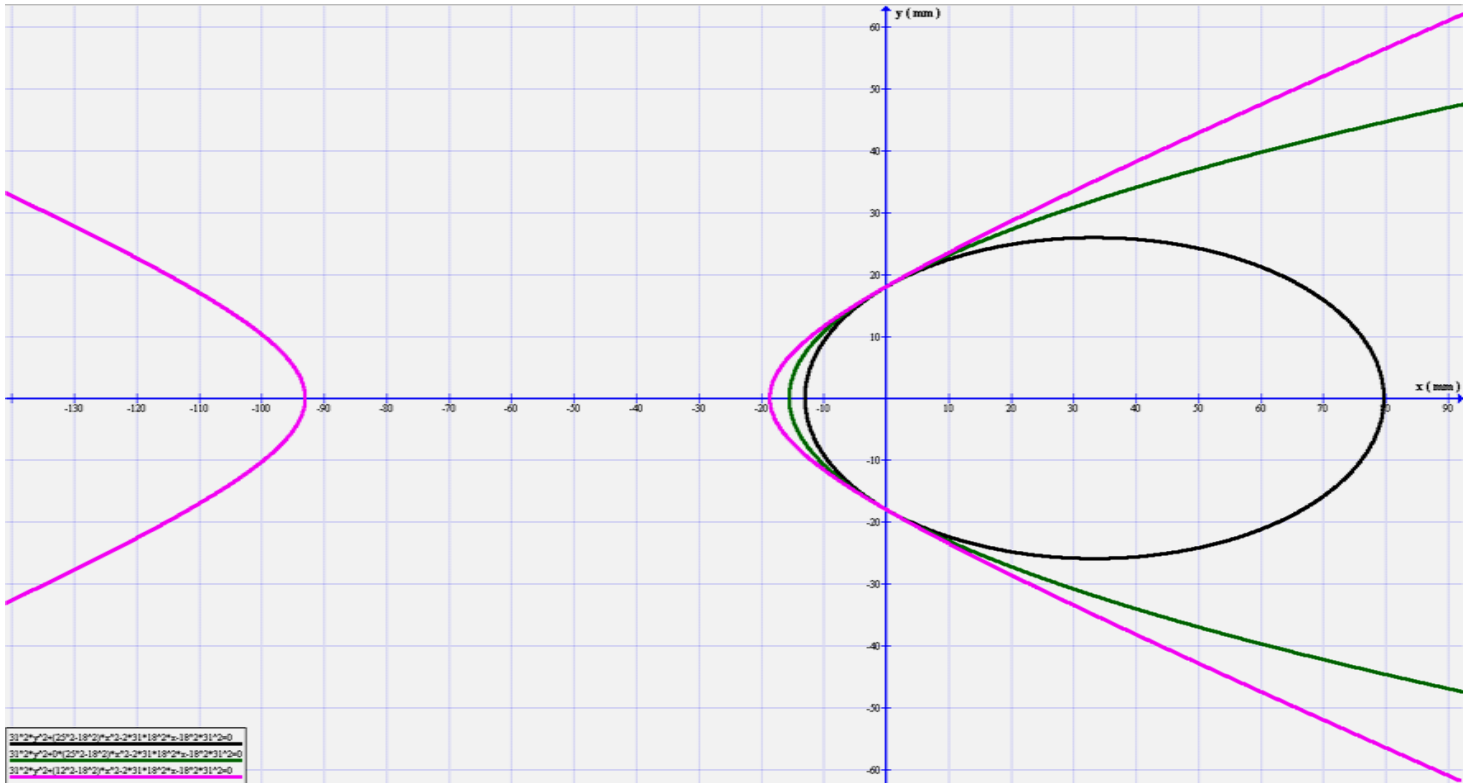
A 3. ábra

~ fekete görbéje ellipszis, $c_1 = 6 \text{ mm} \rightarrow A > 0$;

~ zöld görbéje parabola, $c_2 = 13 \text{ mm} \rightarrow A = 0$;

~ pink görbéje hiperbola, $c_3 = 19 \text{ mm} \rightarrow A < 0$.

Látható, hogy a mértani hely típusa valóban az **A** paraméter előjelétől függ.



3. ábra

Most (9) és

$$A = 0$$

(10)

együtt ezt adja:

$$d^2 \cdot y^2 - 2 \cdot B \cdot x - C = 0 \rightarrow 2 \cdot B \cdot x = d^2 \cdot y^2 - C ,$$

$$\underline{x(y) = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot (d^2 \cdot y^2 - C) .}$$

(11)

A (11) képlet egy *másodfokú parabolát* ír le.

A továbbiakban az

$$A \neq 0$$

(12)

eset(ek)kel foglalkozunk. (9) - ben átalakításokat végezve:

$$A \cdot x^2 - 2 \cdot B \cdot x - C = A \cdot \left(x^2 - 2 \cdot \frac{B}{A} \cdot x - \frac{C}{A} \right) ; \quad (13)$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{B}{A} \cdot x = \left(x - \frac{B}{A} \right)^2 - \frac{B^2}{A^2} , \quad (14)$$

így (13) és (14) - gyel:

$$A \cdot x^2 - 2 \cdot B \cdot x - C = A \cdot \left[\left(x - \frac{B}{A} \right)^2 - \frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A} \right] ; \quad (15)$$

most (9) és (15) - tel:

$$\begin{aligned} d^2 \cdot y^2 + A \cdot \left[\left(x - \frac{B}{A} \right)^2 - \frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A} \right] &= 0 , \\ \frac{d^2}{A} \cdot y^2 + \left(x - \frac{B}{A} \right)^2 - \frac{B^2}{A^2} - \frac{C}{A} &= 0 , \\ \frac{d^2}{A} \cdot y^2 + \left(x - \frac{B}{A} \right)^2 &= \frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A} , \\ \frac{y^2}{\frac{A}{d^2} \cdot \left(\frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A} \right)} + \frac{\left(x - \frac{B}{A} \right)^2}{\frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A}} &= 1 . \end{aligned} \quad (16)$$

Ezután kiszámítjuk a (16) - ban szereplő végső paramétereket, (8) - cal is:

$$x_0 = \frac{B}{A} = d \cdot \frac{r^2}{(d-c)^2 - r^2} ; \quad (17)$$

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A} = \frac{B^2 + C \cdot A}{A^2} = \frac{d^2 \cdot r^4 + r^2 \cdot d^2 \cdot [(d-c)^2 - r^2]}{[(d-c)^2 - r^2]^2} = \frac{r^2 \cdot d^2 \cdot (d-c)^2}{[(d-c)^2 - r^2]^2} , \text{ tehát:} \\ a^2 &= \frac{r^2 \cdot d^2 \cdot (d-c)^2}{[(d-c)^2 - r^2]^2} \rightarrow \underline{\underline{a = \frac{r \cdot d \cdot |d-c|}{|(d-c)^2 - r^2|}}} . \end{aligned} \quad (18)$$

Folytatva, (16), (17) és (18) - cal:

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{A}{d^2} \cdot \left(\frac{B^2}{A^2} + \frac{C}{A} \right) = \frac{A}{d^2} \cdot a^2 = \frac{1}{d^2} \cdot [(d-c)^2 - r^2] \cdot \frac{r^2 \cdot d^2 \cdot (d-c)^2}{[(d-c)^2 - r^2]^2} = \frac{r^2 \cdot (d-c)^2}{(d-c)^2 - r^2} , \text{ tehát:} \\ b^2 &= \frac{r^2 \cdot (d-c)^2}{(d-c)^2 - r^2} ; \end{aligned} \quad (19 / 1)$$

most:

$$A = (d-c)^2 - r^2 > 0 \quad (19 / 2)$$

esetén (19 / 1) és (19 / 2) - vel:

$$b_{ell}^2 = \frac{(d-c)^2 \cdot r^2}{(d-c)^2 - r^2} > 0 \rightarrow \underline{\underline{b_{ell} = \frac{|d-c| \cdot r}{\sqrt{(d-c)^2 - r^2}}} , \quad (19 / 3)$$

majd:

$$A = (d-c)^2 - r^2 < 0 \quad (19 / 4)$$

esetén (19 / 1) és (19 / 4) - gyel:

$$b_{hip}^2 = \frac{r^2 \cdot (d-c)^2}{r^2 - (d-c)^2} > 0 \rightarrow \underline{b_{hip} = \frac{r \cdot |d-c|}{\sqrt{r^2 - (d-c)^2}}}. \quad (19/5)$$

Ezután (16), (17), (18) és (19) - cel:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad (20/1)$$

ez (19 / 2) esetén:

$$\underline{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_{ell}^2} = 1} \quad (20/2)$$

ellipszis,

(19 / 4) esetén:

$$\underline{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b_{hip}^2} = 1} \quad (20/3)$$

hiperbola egyenletét adja. Ezzel, a (11) és (20) képletekkel is – már nem csak számsze -
rűen – beláttuk, hogy a (6) egyenlet

$\sim (d-c)^2 - r^2 > 0$ esetén ellipszist,

$\sim (d-c)^2 - r^2 = 0$ esetén parabolát,

$\sim (d-c)^2 - r^2 < 0$ esetén hiperbolát ír le,

egyezésben az 1. ábra szövegével.

Megjegyzések:

M1. A (11) egyenlet kifejtve, (8) - cal is:

$$x(y) = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot (d^2 \cdot y^2 - C) = \frac{d^2}{2 \cdot d \cdot r^2} \cdot (y^2 - r^2) = \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{y^2}{r^2} - 1 \right), \text{ tehát:}$$

$$\underline{x(y) = \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{y^2}{r^2} - 1 \right)}. \quad (11^*)$$

M2. Az x_0 centrum - eltolási koordinátára, (17) és (19) - cel is:

$$x_0 = d \cdot \frac{r^2}{(d-c)^2 - r^2} > 0 : \text{ellipszis esetén;}$$

$$x_0 = d \cdot \frac{r^2}{(d-c)^2 - r^2} < 0 : \text{hiperbola esetén.}$$

E tények a 3. ábrán is megfigyelhetők.

M3. A **P** metszéspontra utaló „*p*” indexet nem tettük ki az egyenletekben, a könnyebbség kedvéért.

M4. Azon morfondírozunk, hogyan kerülhetett elő ez a kissé szokatlan feladat. Talán egy létező kúpszelet - rajzoló mechanizmus leírása lenne? Vagy az 1. ábrán is meg - nevezett (*Henri*) *Brocard* francia geométer vizsgálatainak egy mellékterméke?

Forrás:

[1] – ***John Casey***: A Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle and Conic Sections
2. Edition, London, Longmans, Green & Co., 1893.

Összeállította: ***Galgóczi Gyula***
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2020. 08. 02.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>